Επαναληπτικές μέθοδοι

25/10/2017
6ο μάθημα

Αναδιατάσσουμε την εξίσωση $f(x)=0$ σε ισοδύναμη της $x=\varphi(x)$.
Αν x^* ρίζα της f τότε $x^*=\varphi(x^*)$. ~~Το x^*~~
Το x^* λέγεται σταθερό σημείο της φ.

Παράδειγμα

$$f(x)=x^3-x-1=0 \iff x=x^3-1=\varphi(x)$$
$$\iff x^3=x+1=(x+1)^{1/3}=\varphi(x)$$
$$\iff kx=x^3+(k-1)x-1$$
$$\iff x=\frac{1}{k}\left(x^3+(k-1)x-1\right)=\varphi(x)$$

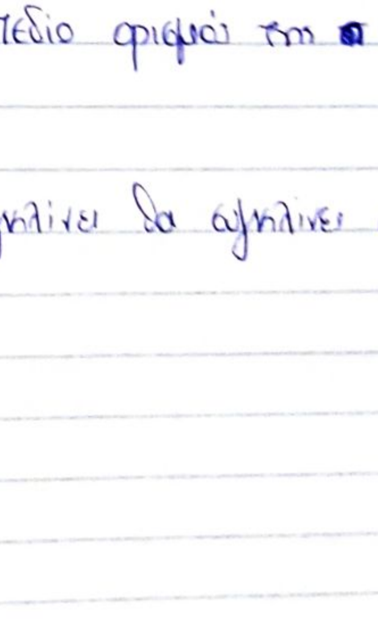
Κατασκευάζουμε ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}$ με x_0 στο πεδίο ορισμού της φ
και $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, $n=0,1,2,\dots$

Αν η ϕ είναι συνεχής και η ακολουθία συγκλίνει θα συγκλίνει σε σταθερό σημείο x^*.

$$x^*=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\varphi\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right).$$

Ύπαρξη σταθερού σημείου

Έστω $\phi:[a,b]\to[a,b]$, συνεχής στο $[a,b]$.
Τότε υπάρχει σταθερό σημείο της φ, $x^*\in[a,b]$



Απόδειξη

Από $\phi:[a,b]\to[a,b] \Rightarrow \varphi(a)\geq a,\ \varphi(b)\leq b$
1) Αν $\varphi(a)=a$, τότε a σταθερό σημείο
2) Αν $\varphi(b)=b$, τότε b σταθερό σημείο
3) Αν $\varphi(a)>a$ και $\varphi(b)<b$, τότε αν $g: g(x)=\phi(x)-x$
$g(a)>0$, $g(b)<0$ Από Θεωρ. Ενδιάμ. Τιμής $\exists\, x^*\in[a,b]$ τέτοιο ώστε $g(x^*)=0 \iff x^*=\varphi(x^*) \Rightarrow x^*$ σταθερό σημείο.

Αν $\varphi : [a,b] \to [a,b]$. Τότε λέμε ότι η ακολουθία $\{x_n\}_{n=v}^{\infty}$
$x_{n+1} = \varphi(x_n)$ είναι καλά ορισμένη στο $[a,b]$.
Αν $x_0 \in [a,b] \Rightarrow x_n \in [a,b] \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Για την μελέτη της σύγκλισης χρησιμοποιούμε τη συνθήκη Lipschitz
Μια συνάρτηση $\varphi \in C[a,b]$ πληρεί τη συνθήκη Lipschitz στο $[a,b]$, αν υπάρχει $L \geq 0$ τέτοιο ώστε
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x-y| \quad \forall \ x,y \in [a,b]$$

Αν $L<1$ τότε λέμε ότι η ϕ είναι συστολή στο $[a,b]$.

Αν $\varphi \in C^1[a,b]$ τότε πληρείται η συνθήκη Lipschitz με
$L = \max\limits_{x \in [a,b]} |\phi'(x)|$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)(x-y)| = |\varphi'(\xi)||x-y| \leq \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)| \cdot |x-y| = L|x-y|$$

Αν $\varphi \in C^1(a,b)$ τότε δεν πληρείται κατ' ανάγκη η συνθήκη Lipschitz.

Παράδειγμα: Έστω $\phi \in C^1(0,1)$: $\varphi(x) = \sqrt{x}$
Τότε $\max\limits_{x \in (0,1)} |\varphi'(x)| = \max\limits_{x \in (0,1)} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \infty$

Θεώρημα (συστολής)

Έστω $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ μια συστολή στο $[a,b]$ με σταθερά $L<1$.
Τότε υπάρχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο x^* της φ στο $[a,b]$.
Η ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}$: $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n=1,2,\dots$
είναι καλά ορισμένη στο $[a,b]$, συγκλίνει στο σταθερό σημείο x^* και για το σφάλμα ισχύουν οι εξής εκτιμήσεις:

1) $|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*| \leq L^n \max\{(x_0-a),(b-x_0)\}$

2) $|x_n - x^*| \leq \dfrac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$

3) $|x_n - x^*| \leq \dfrac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$

Απόδειξη

1) Η ύπαρξη του x^* αποδείχθηκε επειδή $\varphi: [a,b] \to [a,b]$.
Έστω ότι υπάρχουν δύο σταθερά σημεία $x^*, y^* \in [a,b]$. ~~Τότε~~
Τότε

$$|x^* - y^*| = |\varphi(x^*) - \varphi(y^*)| \leq L|x^* - y^*| < |x^* - y^*|,\ \text{άτοπο}$$

Συνεπώς, υπάρχει μοναδικό σημείο.

Είναι καλά ορισμένη επειδή $x_0 \in [a,b]$ κ' $\varphi: [a,b] \to [a,b]$

$$|x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)| \leq L|x_{n-1} - x^*| \leq L^2 |x_{n-2} - x^*| \leq$$

$$\leq L^n |x_0 - x^*| \leq L^n \max\{(x_0-a),(b-x_0)\}$$

Η ακολουθία L^n είναι μηδενική επειδή $L<1$

$\Rightarrow |x_n - x^*|$ μηδενική ακολουθία

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

Θα αποδείξουμε ότι είναι ακολουθία Cauchy.

$|x_2 - x_1| = |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \leq L|x_1 - x_0|$

$|x_3 - x_1| = |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \leq L^2|x_1 - x_0|$

$\vdots$

$|x_n - x_{n-1}| \leq L^{n-1}|x_1 - x_0|$

Θεωρούμε $k \in \mathbb{N}$

$$|x_{n+k} - x_n| \leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq \left(L^{n+k-1} + L^{n+k-2} + \dots + L^n\right)|x_1 - x_0|$$

$$= L^n\left(L^{k-1} + L^{k-2} + \dots + 1\right)|x_1 - x_0|$$

$$= L^n \frac{1-L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Επομένως, η ακολουθία είναι Cauchy. Συνεπώς, είναι συγκλίνουσ
με $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = |x - x_n|$ συνεχής στο $[a, b]$.

$$g(x^*) = |x^* - x_n| = g(\lim_{k \to \infty} x_{n+k}) = \lim_{k \to \infty} g(x_{n+k}) = \lim_{k \to \infty}|x_{n+k} - x_n|$$

$$\leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$$

3) Για $n=1$ η (2) μας δίνει $|x_1 - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_1 - x_0|$

Αν θεωρήσουμε ως x_0 την επανάληψη x_{n-1} τότε στ
θέση του x_1 θα έχουμε το x_n

Επομένως, $|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|$